SOLVENCY II:
Confronto tra i modelli Over Dispersed Poisson e Fisher-Lange stocastico

Direzione Risk Management Gruppo Fondiaria-SAI
- Risk Management Tecnico Rami Danni -

Pomeriggio Attuariale
Facoltà di Economia di Torino, 1° Dicembre 2011

Michele Di Vico

PREMESSE

• Questo lavoro rappresenta una sintesi dell'analisi svolta per l'implementazione del modello interno di Fondiaria-SAI per il calcolo del Reserve Risk Capital secondo le norme previste dalla direttiva SII.

• Tale analisi è stata effettuata da tutto l'ufficio Risk Management Tecnico rami danni, in particolare:

Dott. Restione, Dott.sa Burello, Dott. Di Vico, Dott. Fasano e Dott.sa Sediani.

• I modelli implementati sono l'Over Dispersed Poisson e il Fisher-Lange stocastico.

- M. De Felice, F. Moriconi "Risk Based Capital in P&C Loss Reserving or Stressing the Triangle", Dicembre 2003;

- M. De Felice, F. Moriconi "Un'estensione stocastica del modello Fisher-Lange";

INDICE

La Direttiva Solvency II

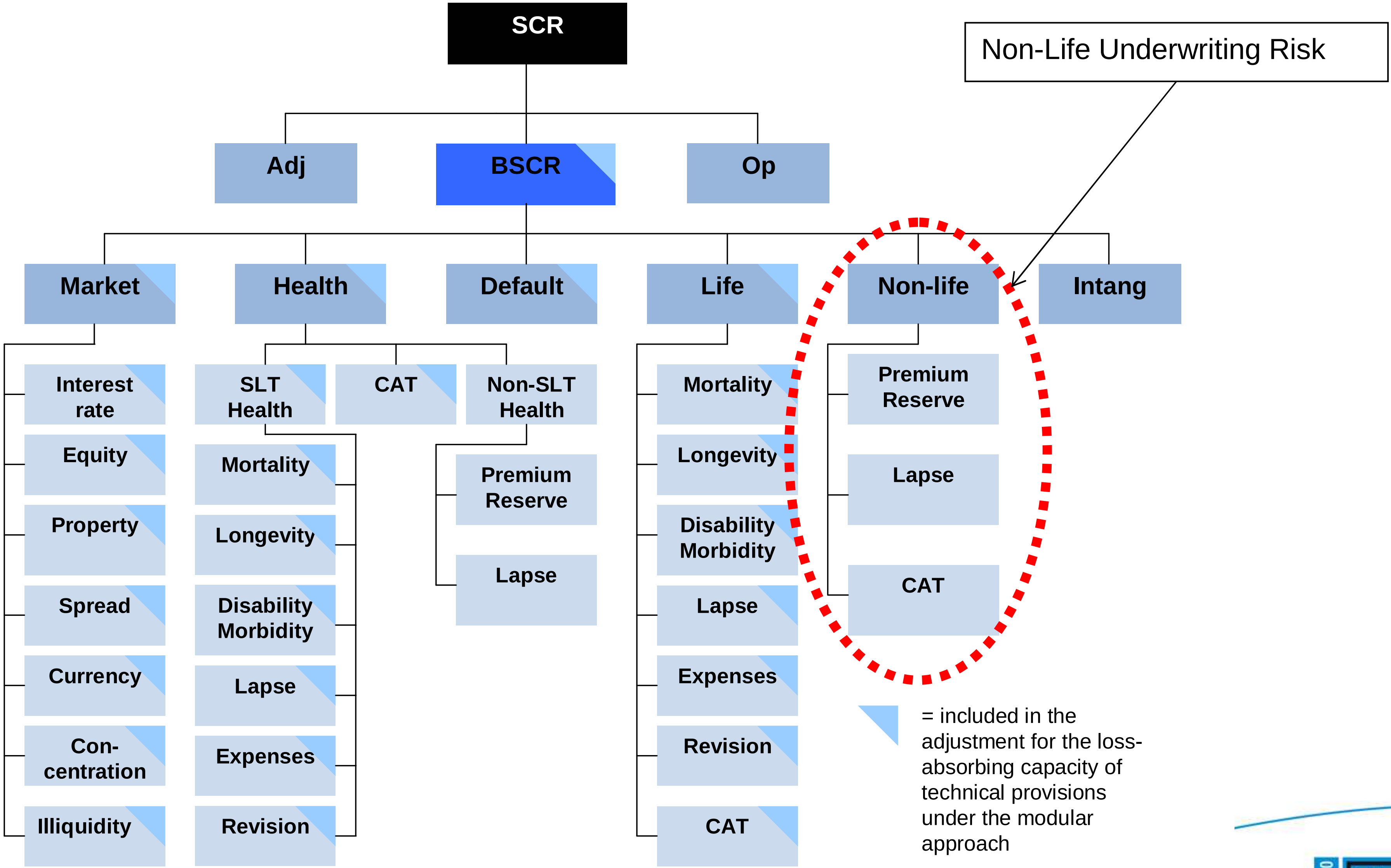
La **direttiva 2009/138/EC** è stata approvata il 22 Aprile 2009 dal Parlamento Europeo:

- Include 13 precedenti direttive e le nuove regole di solvibilità;
- Contiene i principi Solvency II:
  - l’obiettivo è quello di passare ad una valutazione *market consistent* della solvibilità del business assicurativo;
  - approccio basato sul balance sheet;
  - valutazione mark to market;
  - valutazione integrata dei rischi globali della compagnia;
  - Standard Formula vs Internal Model.

Art. 101 paragrafo 3

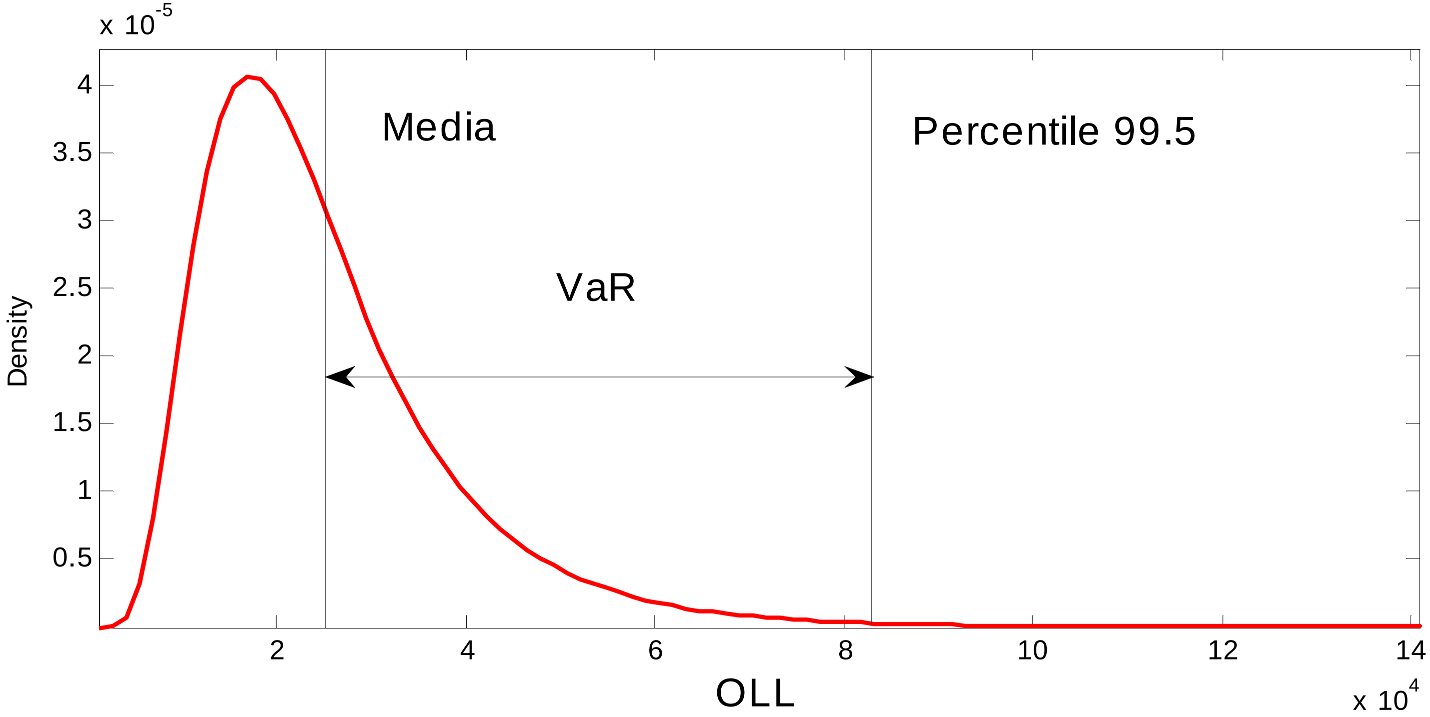
Il requisito patrimoniale di solvibilità è calibrato in modo da garantire che siano presi in considerazione tutti i rischi quantificabili cui è esposta un’impresa di assicurazione.
Esso copre l’attività esistente nonché le nuove attività che si prevede vengano iscritte nel corso dei dodici mesi successivi.

La Formula Standard: Il Solvency Capital Requirement (1/2)



La Formula Standard: Il Solvency Capital Requirement (2/2)

L'SCR è stato calibrato dall'EIOPA riferendosi a VaR calcolati al 99,5% di confidenza su un orizzonte temporale di un anno.



Il Value at Risk è dato dalla differenza tra il percentile 99.5 e la media della distribuzione. Il VaR ad un anno viene anche chiamato RISK CAPITAL nell'analisi dell'Economic Capital aziendale.

La Formula Standard: Il Non-Life Underwriting Risk (1/2)

Rischio Riservazione

Rischio che le riserve non siano sufficienti a far fronte agli impegni della Compagnia.

Rischio di tariffazione

Rischio che i premi raccolti non siano sufficienti a far fronte ai rimborsi dovuti nel primo anno di sviluppo ed agli impegni residui attesi.

Rischio catastrofale

Rischio che eventi estremi ed eccezionali non siano sufficientemente catturati dai fabbisogni di capitale per i rischi di tariffazione e riservazione.

La Formula Standard: Il Non-Life Underwriting Risk (2/2)

Il Capitale per il rischio premio e riserva è dato da:

$$NL_{pr} = \rho_{\alpha}(\sigma) \cdot V$$

V: misura di Volume (riserve e premi);

σ: deviazione standard che tiene conto della volatilità delle riserve e della volatilità dei loss ratio;

$\rho_{\alpha}(\sigma)$: la funzione è impostata in modo tale che, presupponendo una distribuzione lognormale del rischio sottostante, si produca un requisito patrimoniale a fronte del rischio in linea con il VaR con un obiettivo di calibrazione del 99,5%. Approssimativamente vale che

$$\rho_{\alpha}(\sigma) \approx 3 \cdot \sigma$$

α: percentile 99.5 della distribuzione normale standard

La Formula Standard: La Diversificazione

La formula standard prevede una diversificazione trai i sottorischi e una diversificazione tra le LoB mediante l'utilizzo di matrici di correlazione.

Matrice di correlazione tra rischi

CorrNL	**NLpr**	**NLlapse**	**NLCAT**
NLpr	100%	0%	25%
NLlapse	0%	100%	0%
NLCAT	25%	0%	100%

Matrice di correlazione tra LoB

CorrLob	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1: Motor vehicle liability	100%	50%	50%	25%	50%	25%	50%	25%	50%	25%	25%	25%
2: Other motor	50%	100%	25%	25%	25%	25%	50%	50%	50%	25%	25%	25%
3: MAT	50%	25%	100%	25%	25%	25%	25%	50%	50%	25%	25%	50%
4: Fire	25%	25%	25%	100%	25%	25%	25%	50%	50%	50%	25%	50%
5: 3rd party liability	50%	25%	25%	25%	100%	50%	50%	25%	50%	25%	50%	25%
6: Credit	25%	25%	25%	25%	50%	100%	50%	25%	50%	25%	50%	25%
7: Legal exp.	50%	50%	25%	25%	50%	50%	100%	25%	50%	25%	50%	25%
8: Assistance	25%	50%	50%	50%	25%	25%	25%	100%	50%	50%	25%	25%
9: Miscellaneous.	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	100%	25%	25%	50%
10:Np reins. (property)	25%	25%	25%	50%	25%	25%	25%	50%	25%	100%	25%	25%
11:Np reins. (casualty)	25%	25%	25%	25%	50%	50%	50%	25%	25%	25%	100%	25%
12:Np reins. (MAT)	25%	25%	50%	50%	25%	25%	25%	25%	50%	25%	25%	100%

La Formula Standard: Gli Undertaking Specific Parameters

L'impresa ha la possibilità di determinare la deviazione standard di ogni Linea di Business (σ_{lob}) mediante metodi standardizzati forniti dall'EIOPA e applicati ai parametri dell'impresa (Undertaking Specific Parameters).

La convenienza per la compagnia si traduce nella possibilità di applicare ai volumi di premi e di riserva sinistri dei parametri di volatilità più bassi di quelli di mercato.

I metodi di calcolo per gli USP sono tre per il rischio premio e tre per rischio riserva.
In ottica Solvency II, l'adozione degli USP da parte dell'impresa può avvenire previa approvazione da parte del supervisor competente.

Il Modello Interno

Art 112 paragrafo 2 delle Direttiva **2009/138/EC**

Le imprese di assicurazione possono utilizzare modelli interni per il calcolo di uno o più sottomoduli di rischio.

→ Possibilità di sostituire, una volta ottenuta l’autorizzazione dall’autorità di vigilanza, il requisito di capitale (SCR) calcolato dalla formula standard con quello risultante dall’applicazione di un modello implementato all’interno dell’impresa.

→ Si determina un requisito di capitale che meglio rifletta il profilo di rischio dell’impresa, incentivando il miglioramento della gestione interna dei rischi.

Il Modello Interno: Gli obiettivi

Ogni modello interno deve produrre come output, oltre al requisito patrimoniale per il rischio trattato (es. tariffazione, riservazione) anche i valori di Best Estimate delle riserve (premi e sinistri).

BE Riserva Premi

Proiezioni dei flussi di cassa dei futuri pagamenti per sinistri e costi di amministrazione derivanti da tali eventi, dei flussi di cassa generati dalla gestione continuativa delle polizze in vigore e dei premi futuri derivanti dalle polizze esistenti.

BE Riserva Sinistri

E' definita come $\bar{L} = E(L)$ ovvero la media della distribuzione di probabilità dei pagamenti L. Applicando un opportuno modello statistico sui dati osservati, considerati come estratti da un campione casuale, si ottiene il *predicted value* $\hat{L}$, anch'esso una variabile casuale. La distribuzione predittiva di $\hat{L}$, fornisce la distribuzione di probabilità delle *Liabilities.*

Il Modello Interno: Alcuni modelli per i rischi di riserva e di tariffazione

Rischio di riserva

- **Over Dispersed Poisson (ODP)**
- **Fisher-Lange Stocastico**
- Bayesiano
- Collective Risck Models
- DFCL: Modello di Mack

Rischio di premio

- Modello Lognormale
- Frequency-Severity
- Frequency-Severity Swiss Solvency Test approach

L'Over Dispersed Poisson Model (1/7)

Gli input del modello

Si considera I il numero di anni di accadimento (AY) dei sinistri e J il numero degli anni di sviluppo (DY) . Poniamo $I=J$ e l'indice diagonale dei triangoli dei pagati $d_i=I-i+1$.

Per ogni (i,j) si avrà:

- C_{ij} : l'ammontare degli importi pagati nel corso dell'anno *(i,j);*

$dy\ j$

$ay\ i$	1	2	3	4
1	•	•	•	•
2	•	•	•	○
3	•	•	○	○
4	•	○	○	○

L'Over Dispersed Poisson Model (2/7)

Il Chain-Ladder deterministico

L'ODP si basa sul Chain-Ladder tradizionale. Il CL si basa sulle seguenti ipotesi:

- i pagati cumulati S_{ij} di differenti anni *i* di accadimento sono indipendenti;

- esistono dei fattori di sviluppo $\lambda_1,.....,\lambda_J > 0$ tali che per ogni $0 \le i \le I$ ed ogni $0 \le i \le J$ si ha: $E\left[S_{ij} \mid S_{i0},....,S_{i,j-1}\right] = E\left[S_{ij} \mid S_{i,j-1}\right] = \lambda_{j-1} S_{i,j-1}$

- i fattori di sviluppo del CL sono stimati nel seguente modo:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\sum_{i=1}^{d_j-1} S_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{d_j-1} S_{i,j}}, \qquad j = 1,\ldots,n-1 \quad con \quad \lambda_n = 1$$

essi rappresentano una media ponderata dei fattori di sviluppo individuali $F_{i,j+1}=S_{i,j+1}/S_{ij}$;

- $E\left[\hat{\lambda}_1,.....,\hat{\lambda}_j\right] = E\left[\hat{\lambda}_1\right] \cdots E\left[\hat{\lambda}_j\right]$, ovvero, $\hat{\lambda}_1,.....,\hat{\lambda}_{J-1}$ sono indipendenti;

L'Over Dispersed Poisson Model (3/7)

Le ipotesi del modello

E' stato proposto da Renshaw e Verral nel 1998.

→ L'ipotesi principale del modello è l'esistenza di indipendenza tra i pagamenti incrementali C_{ij}.

La media di ogni singolo pagamento è uguale al prodotto di un parametro di riga e di un parametro di colonna.
La varianza è proporzionale alla media, attraverso un ulteriore parametro che determina la sovradispersione.

$$E\left[C_{ij}\right] = m_{ij} = x_i y_j \qquad e \qquad VAR\left[C_{ij}\right] = \phi m_{ij} = \phi x_i y_j$$

Sotto queste ipotesi gli MLE dei fattori di sviluppo individuali coincidono con gli stimatori del Chain-Ladder tradizionale.

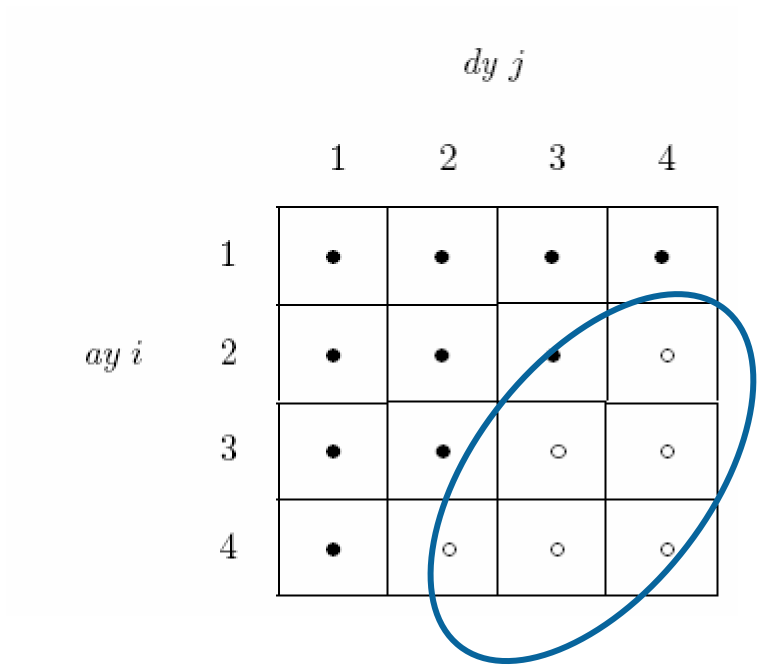
L'Over Dispersed Poisson Model (4/7)

La struttura del modello

1. Si considerano i fattori di sviluppo del Chain-Ladder tradizionale λ_j, ovvero:

$$\lambda_i = \frac{\sum_{i=1}^{d_j-1} S_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{d_j-1} S_{i,j}}, \qquad j = 1, \ldots, n-1 \quad con \quad \lambda_n = 1$$

Attraverso il Chain-Ladder tradizionale si calcolano le stime dei pagati cumulati futuri $\hat{S}_{ij}$, e i corrispondenti pagati incrementali $\hat{C}_{ij}$ per *i= 2,….,n* e *j = di+1, di+2, … , n*.



L'Over Dispersed Poisson Model (5/7)

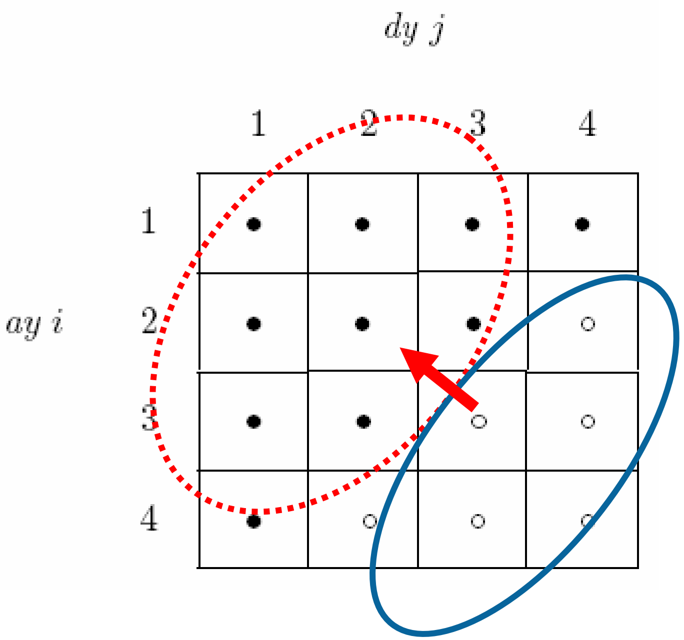
La struttura del modello

2. Tramite le stime degli importi futuri si applica il Chain-Ladder a ritroso determinando nuove stime degli importi cumulati

$$\hat{S}_{ij}, \qquad i=1,\dots,n, \qquad j=1,\dots,d_i$$

ed incrementali già pagati.

$$\hat{C}_{ij}, \qquad i=1,\dots,n, \qquad j=1,\dots,d_i$$



Si determinano i cosiddetti *Residui aggiustati di Pearson*

$$r_{ij}^{*} = \frac{C_{ij} - \hat{C}_{ij}}{\sqrt{\widehat{C}_{ij}}} \sqrt{\frac{m}{m-l}}, \qquad i = 1,\dots,n, \qquad j = 1,\dots,d_i$$

- *m = n(n+1)/2* ovvero il numero dei pagati del triangolo.
- *l = 2n-1* è il numero di parametri usati per calibrare il modello

L'Over Dispersed Poisson Model (6/7)

La struttura del modello

3. La procedura di simulazione iterativa è basata sul triangolo dei residui aggiustati.

Su tali *Residui di Pearson* viene applicato un processo di **bootstraping**, ovvero di estrazione con reinserimento. Ipotizzando *h* iterazioni del processo alla *k*-esima iterazione con estrazione uniforme con reinserimento si determina un nuovo triangolo dei *Residui*.

Dal triangolo dei *Residui* si ricava il triangolo degli importi pseudo-incrementali:

$$ {}_k C_{ij} = {}_k r^*_{ij} \sqrt{\widehat{C}_{ij}} + \widehat{C}_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n, \qquad j = 1, \dots, d_i \tag{1} $$

Applicando nuovamente il Chain-Ladder si ottengono, per la generica iterazione *k*, le stime dei pagati incrementali futuri.

$$ {}_k \hat{C}_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n, \qquad j = d_i + 1, \dots, n $$

L'Over Dispersed Poisson Model (7/7)

La struttura del modello

4. Iterando il passo 3 un numero *h* di volte si ottiene la distribuzione predittiva dei futuri sinistri pagati

$$ {}_{k}\hat{C}_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad j = d_i + 1, \ldots, n \qquad per \quad k = 1, \ldots, h $$

Pertanto la distribuzione predittiva delle *Liabilities* è data da:

$$ {}_{k}L = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=d_i}^{n} {}_{k}C_{ij} \qquad\qquad k = 1, \ldots, h $$

Il Fischer-Lange Stocastico (1/5)

Gli input del modello

Si considera I il numero di anni di accadimento (AY) dei sinistri e J il numero degli anni di sviluppo (DY) . Poniamo $I=J$ e l'indice diagonale dei triangoli dei pagati $d_i=I-i+1$.

Per ogni (i,j) si avrà:

- C_{ij} : l'ammontare degli importi pagati nel corso dell'anno *(i,j);*
- N_{ij} : il numero di sinistri pagati chiusi nel corso dell'anno *(i,j);*
- R_{ij} : il numero dei sinistri messi a riserva alla fine dell'anno *(i,j);*
- D_I *:* L'insieme delle terne $\{C_{ij}, N_{ij}, R_{ij}\}$ osservate in $t=I$;
- B_{ij} : il numero dei sinistri con seguito, ovvero: $B_{ij}=N_{ij}+R_{ij}$;
- k_j : costo medio per ciascun anno di sviluppo, ovvero:

$$\hat{k}_j = \frac{\sum_{i \in I_j} C_{ij}}{\sum_{i \in I_j} N_{ij}}$$

Con $I_j = \{ i \mid may(j) \leq i \leq d_j \}$ dove $may(j)$ rappresenta il minimo AY i nel quale si ha un'osservazione di $Y_{ij}=\{C_{ij}, N_{ij}, R_{ij}\}$ nel DY j

Il Fischer-Lange Stocastico (2/5)

Gli schemi deterministici

Si suppone che per $1 \leq i \leq I$ e $mdy(i)+1 \leq j \leq I$, valgano le relazioni di ricorrenza:

Schema in serie

$$\begin{cases} B_{ij} = \alpha_j R_{i,j-1} \\ N_{ij} = \upsilon_j B_{i,j} \\ R_{ij} = B_{i,j} - N_{ij} \end{cases}$$

Schema in parallelo

$$\begin{cases} B_{ij} = \alpha_j R_{i,j-1} \\ N_{ij} = \varphi_j R_{i,j-1} \\ R_{ij} = B_{i,j} - N_{ij} \end{cases}$$

Nella pratica attuariale tipicamente si adottano, per $2 \leq j \leq I$, gli stimatori:

- $\alpha_j = \sum_{i \in I_j} \frac{R_{i,j-1}}{\sum_{k \in I_j} R_{k,j-1}} A_{ij},$ *con* $A_{ij} = \frac{B_{ij}}{R_{i,j-1}}$
- $\upsilon_j = \sum_{i \in I_j} \frac{B_{i,j}}{\sum_{k \in I_j} B_{k,j}} Q_{ij},$ *con* $Q_{ij} = \frac{N_{ij}}{B_{i,j}}$
- $\varphi_j = \sum_{i \in I_j} \frac{R_{i,j-1}}{\sum_{k \in I_j} R_{k,j-1}} \Phi_{ij},$ *con* $\Phi_{ij} = \frac{N_{ij}}{R_{i,j-1}}$

Il Fischer-Lange Stocastico (3/5)

Ulteriori ipotesi

Lo sviluppo dei rimborsi si completa entro il DY *I*;
Pertanto varrà la condizione di *run-off*: $R_{iI}=0$ per $i=1,\dots,I$

Se tale condizione non è rispettata dai dati si avrà $R_{1I}>0$ e $B_{1I}>N_{1I}$, pertanto:

$$\upsilon_{jI} = \frac{N_{1I}}{R_{1,I}} < 1$$

La stima dei riservati nell'ultimo anno di sviluppo risulta essere positiva.
Occorre includere queste code negli schemi di sviluppo.

→ Un metodo prevede la modifica dei dati:

1. Si annullano i riservati R_{1I};
2. Si sommano i riservati R_{1I} ai chiusi N_{1I};
3. Si sostituiscono gli importi C_{1I} con

$$C_{1I} \frac{N_{1I} + R_{1I}}{N_{1I}}$$

Il Fischer-Lange Stocastico (4/5)

Il modello stocastico

Il FL Stocastico consente di costruire l'intera distribuzione di probabilità dei costi medi dei rimborsi futuri, producendo quindi una adeguata misurazione del *reserve risk* e una quantificazione del corrispondente requisito patrimoniale.

→ Struttura trivariata poiché lo sviluppo dei costi è determinato da tre processi stocastici:

1.Il processo dei Costi Medi

$$\tilde{C}_{ij} = \tilde{k}_j \tilde{N}_{ij} + \hat{\rho}_j \sqrt{\tilde{N}_{ij}}\,\varepsilon_{ij}^{C} \qquad per \quad i + j > I + 1$$

2. Il processo del numero di sinistri “con seguito”

$$\tilde{B}_{ij} = \tilde{\alpha}_j R_{i,j-1} + \hat{\beta}_j \sqrt{R_{i,j-1}}\,\varepsilon_{ij}^{B} \qquad per \quad 2 \le i \le I \quad e \quad j = d_i + 1$$

3. Il processo del numero di sinistri pagati.

$$\tilde{N}_{ij} = \tilde{\varphi}_j \tilde{R}_{i,j-1} + \sqrt{\tilde{R}_{i,j-1}}\left(\varepsilon_{ij}^{N} \sqrt{\hat{\psi}_j^{2} - \hat{\gamma}_j^{2} / \hat{\beta}_j^{2}} + \varepsilon_{ij}^{B}\, \hat{\gamma}_j / \hat{\beta}_j\right) \quad per \quad 2 \le i \le I \quad e \quad j = d_i + 1$$

Nelle relazioni sopra riportate i fattori $\tilde{k},\ \hat{\rho},\ \tilde{\alpha},\ \hat{\beta},\ \tilde{\varphi},\ \hat{\psi}\ e\ \hat{\gamma}$ rappresentano parametri delle distribuzioni mentre $\varepsilon^{C},\ \varepsilon^{B}\ e\ \varepsilon^{N}$ indicano variabili aleatorie Normali Standard indipendenti.

Il Fischer-Lange Stocastico (5/5)

La stima dell'errore

Nei modelli interni per Solvency II vi è la necessità di includere nella misurazione dell'incertezza anche la componente derivante dagli errori di stima dei parametri.

Si introduce pertanto il *Mean Square Error of Prediction* (MSEP).

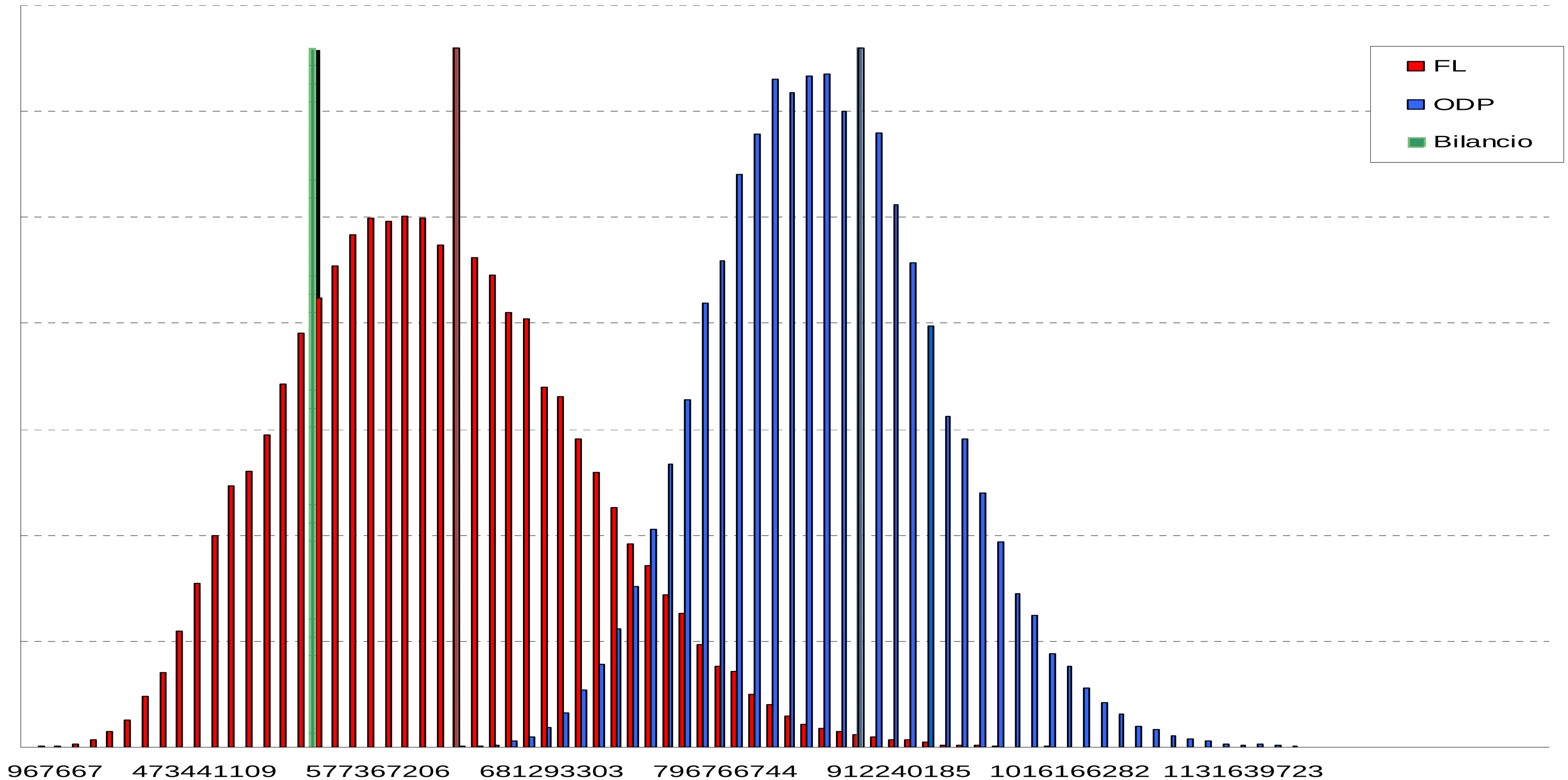
Considerando i costi C_{ij} per $i+j>I+1$ e $D_I = \bigcup_{j=1}^{I} \left\{ \left(C_{ij}, N_{ij}, R_{ij} \right) \middle| i \in I_j \right\}$

l'*MSEP* condizionato di C_{ij}, dato D_I, è descritto dalla seguente relazione:

$$msep_{C_{ij}|D_I}\left(\widehat{C_{ij}}\right) = \underbrace{Var\left(C_{ij} \middle| D_I\right)}_{\textit{Process Error}} + \underbrace{\left[\widehat{C}_{ij} - E\left(C_{ij} \middle| D_I\right)\right]^2}_{\textit{Estimation Error}}$$

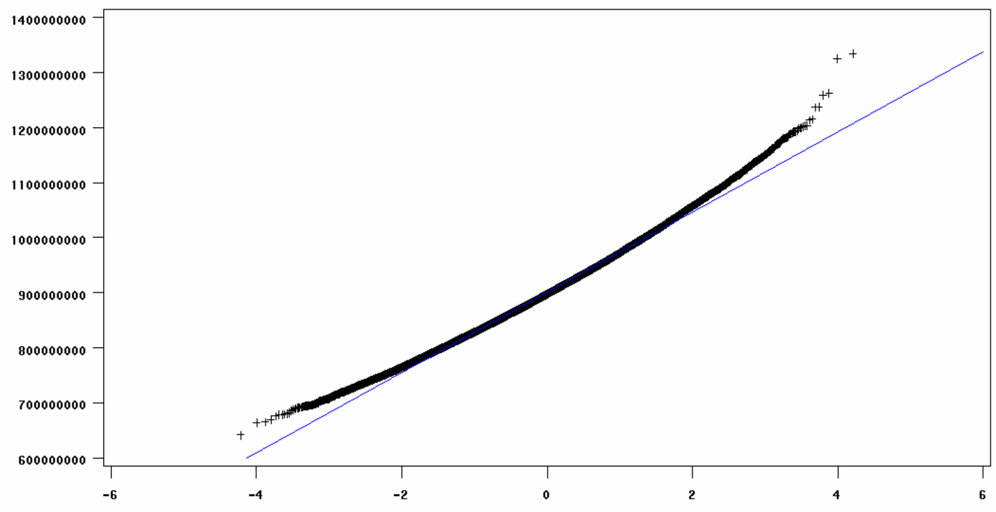
Confrontro tra ODP e Fisher-Lange Stocastico (1/4)

Le funzioni di densità delle distribuzioni predittive delle *Liabilities*

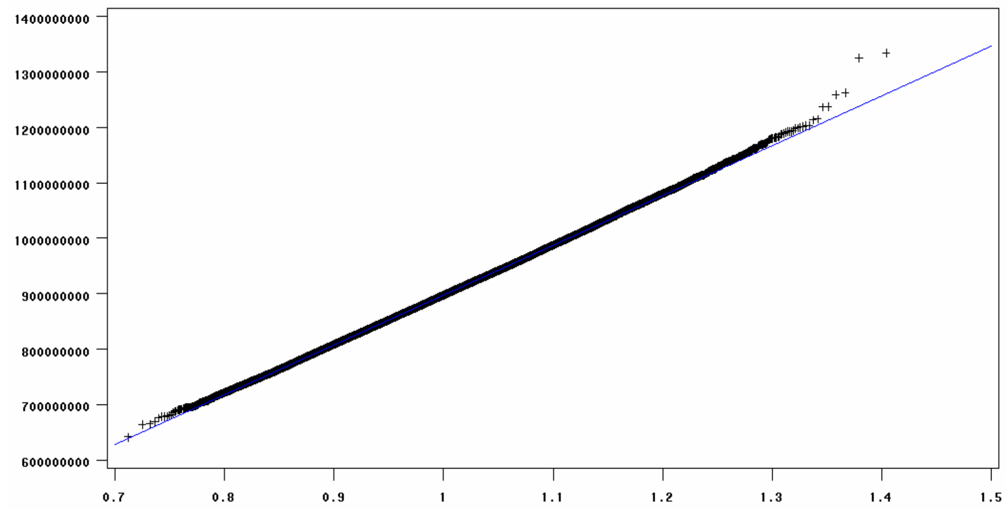


Confrontro tra ODP e Fisher-Lange Stocastico (3/4)

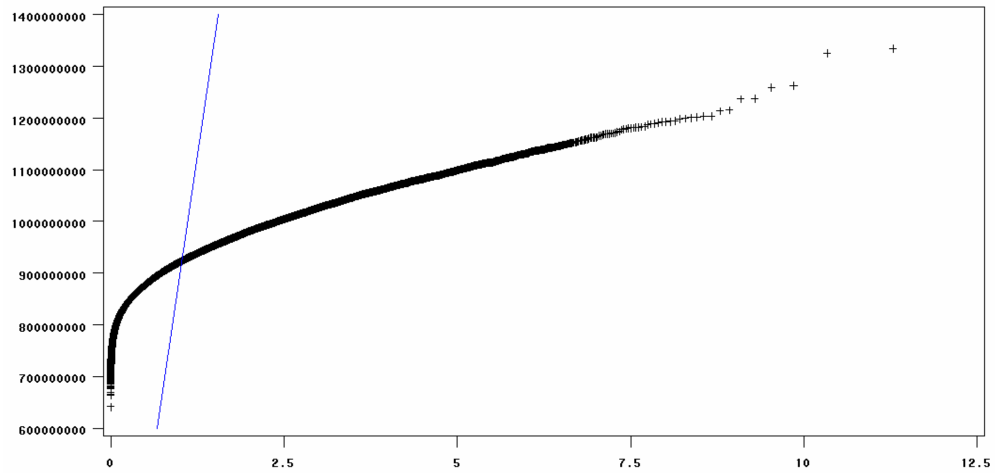
Distribuzioni predittive delle *Liabilities* con l'ODP



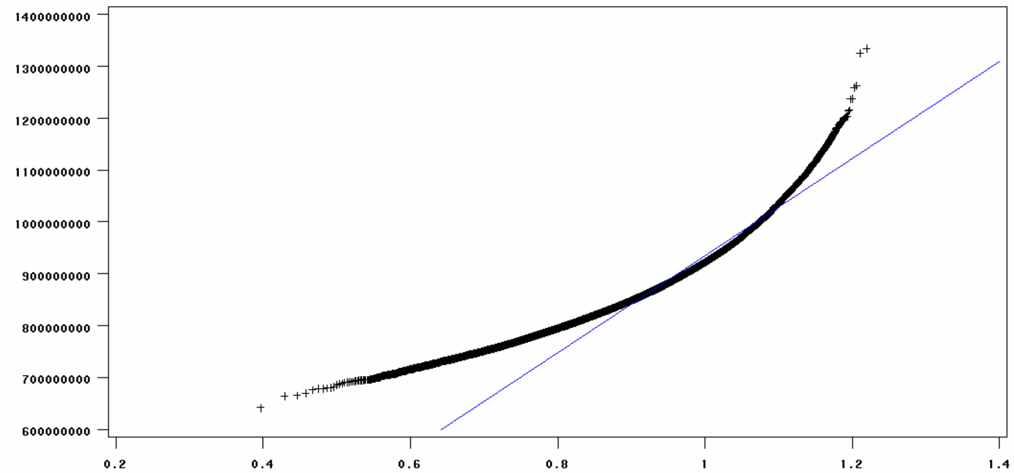
qq-plot distribuzione Normale



qq-plot distribuzione Logormale



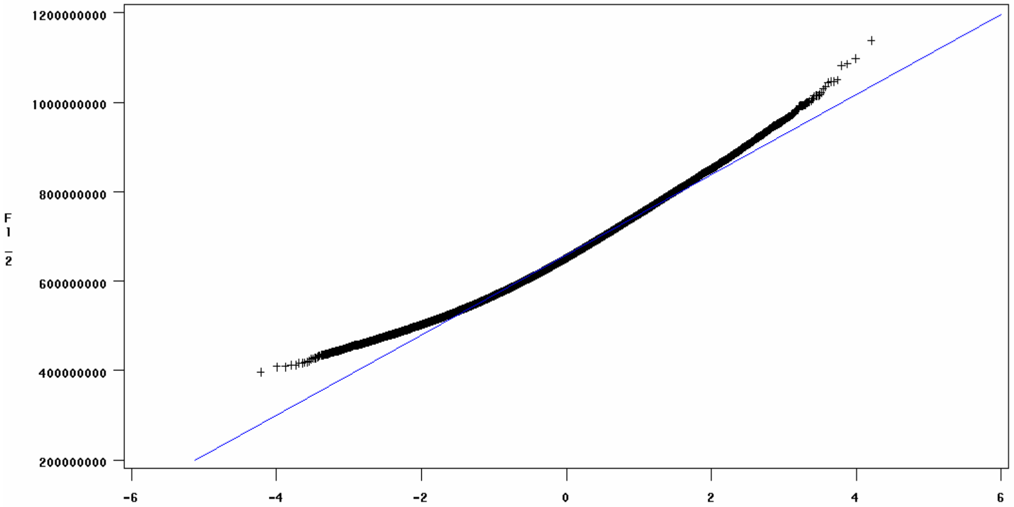
qq-plot distribuzione Esponenziale



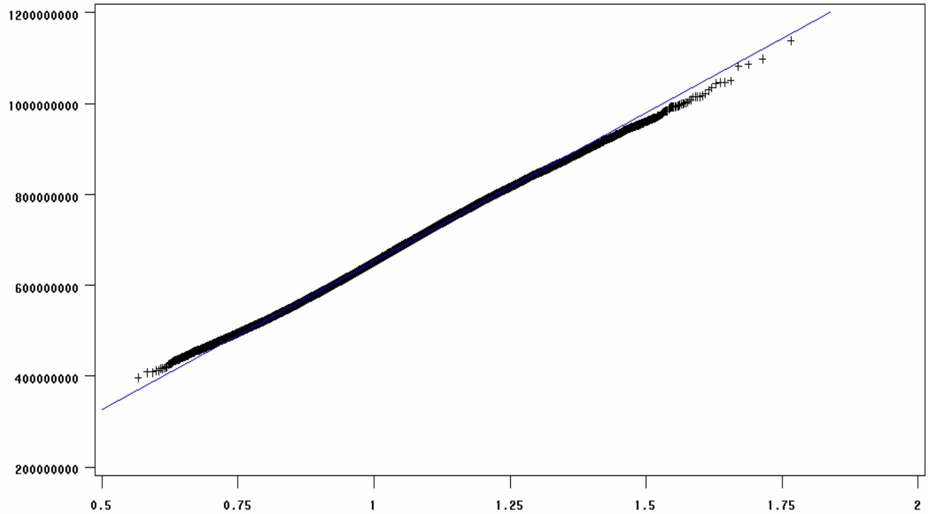
qq-plot distribuzione Weibul

Confrontro tra ODP e Fisher-Lange Stocastico (2/4)

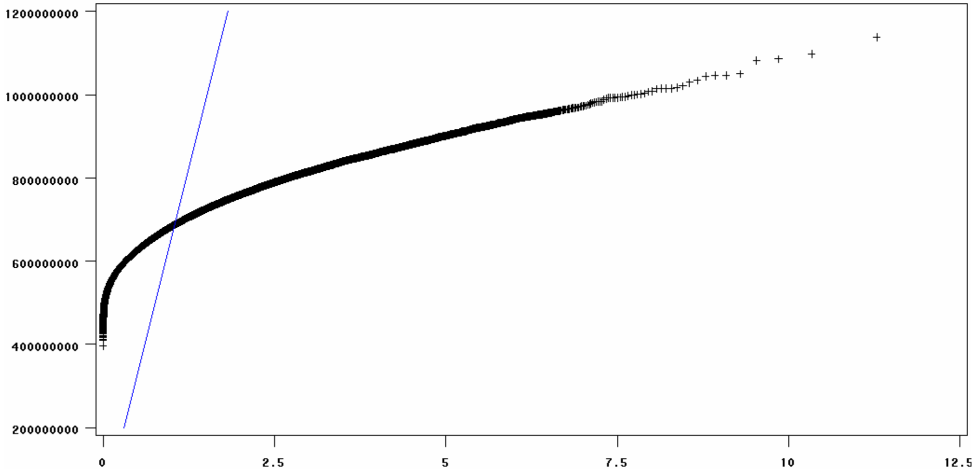
Distribuzioni predittive delle *Liabilities* col FL stocastico



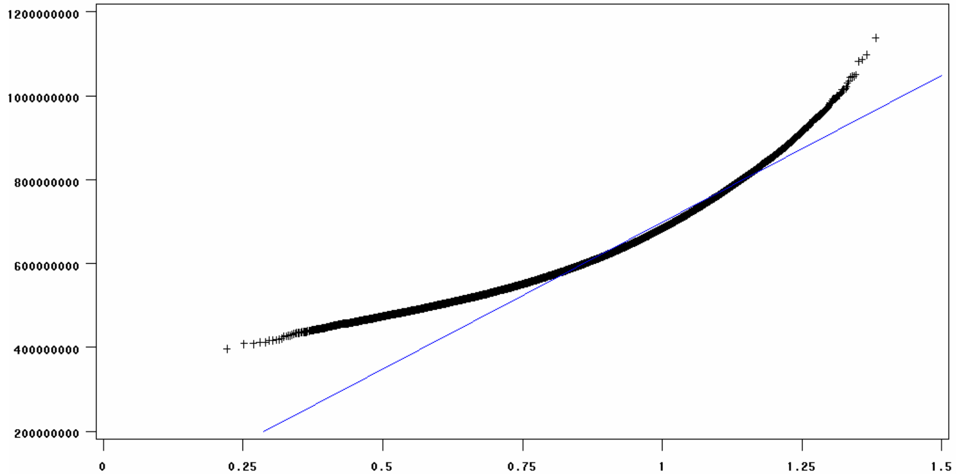
qq-plot distribuzione Normale



qq-plot distribuzione Logormale



qq-plot distribuzione Esponenziale



qq-plot distribuzione Weibul

Confrontro tra ODP e Fisher-Lange Stocastico (4/4)

Nella tabella sotto riportata, è presente un confronto tra i risultati relativi ad un generico ramo danni derivanti dal Fisher-Lange stocastico e dal modello Over Dispersed Poisson (ODP).

Come è facilmente verificabile i valori di Best Estimate della riserva sinistri risultano più bassi con il Fisher-Lange stocastico.

Triangolo 10x10

100000 Simulazioni

Riserva Bil.	**538.842.913**

	BE - Deterministico		BE - Stocastico		CV - Stocastico		RC 99.5% - Stocastico	
Modello	**ODP**	**FLS**	**ODP**	**FLS**	**ODP**	**FLS**	**ODP**	**FLS**
	968.532.967	628.183.783	920.564.443	658.718.677	8,419%	13,584%	221.521.126	241.641.800

Differenza	BE - Deterministico	BE - Stocastico	CV - Stocastico	RC 99.5% - Stocastico
	340.349.184	261.845.766	-5,165%	-20.120.674

Differenza %	BE - Deterministico	BE - Stocastico	RC 99.5% - Stocastico
	54,180%	39,751%	-8,327%

I valori di risk capital del FL sono più elevati dell'ODP a causa di una più elevata dispersione dei dati simulati causata da un numero più elevato di dati di partenza (Triangoli dei pagati, del numero di sinistri chiusi e del numero di riservati).

GRUPPO FONDIARIA SAI

CONCLUSIONI

Quale dei due modelli è preferibile utilizzare?

Nella pratica attuariale italiana la Riserva sinistri di bilancio viene calcolata con il metodo Fisher-Lange.
Utilizzando il FL stocastico per il calcolo delle BE sinistri si otterrebbe uniformità di modelli.

Il FL Stocastico utilizza più dati → aumenta l'errore e di conseguenza il Risk Capital è più elevato rispetto al modello ODP.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE